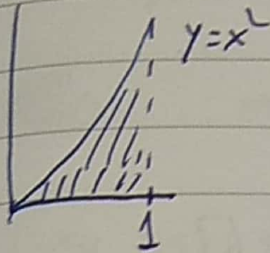
16/04/2018



$E = \int_0^1$ $\quad E = \int_0^1 x^2\,dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{1}{3}$

Δίνεται διάστημα $[\alpha, \beta]$

Διαμέριση του $[\alpha, \beta]$ ονομάζουμε ένα σύνολο $\subseteq [\alpha, \beta]$ ως εξής

$$P = \{ \alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = \beta \}$$

Πλάτος της διαμέρισης $\|P\| = \max \{ (x_{k+1} - x_k) : k = 0, 1, \ldots \}$

Ορισμός: Δίνεται $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και $P = \{ \alpha = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = \beta \}$ διαμ. του $[\alpha, \beta]$

Ορίζουμε $m_k = \inf \{ f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}] \}$

$$M_k = \sup \{ f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}] \}$$

$k = 0, 1, \ldots$ Αφού f: φραγμένη $m \leq f(x) \leq M$ //

Ονομάζουμε κάτω άθροισμα της f, ως προς την P

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k)$$

$$U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k)$$ άνω άθροισμα της f, ως προς P.

$L(f,P) \leq U(f,P) \quad \forall$ διαμ. P.

$L(f,P) \leq U(f,Q)$

$\forall$ P,Q διαμερίσεις του $[\alpha,b]$

Λήμμα: $f:[\alpha,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. P διαμ. του $[\alpha,b]$

Θεωρούμε μια νέα διαμέριση $P_1 = P \cup \{y\}$

... για κάποιο $y \in [\alpha,b] \setminus P$

Λέμε τότε ότι P_1 λεπτότερη της P.

Ισχυρισμός: $L(f,P) \leq L(f,P_1)$

$$L(f,P) = \sum_{j=0}^{n-1} m_j (x_{j+1} - x_j)$$

$P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b\}$

$P_1 = \{y\} \cup P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_k < y < x_{k+1} < \dots < x_n = b\}$

$m_k = \inf\{f(x) \; x \in [x_k, x_{k+1}]\}$

(2) $$L(f,P_1) = \sum_{i=0}^{k-1} m_i (x_{i+1} - x_i) + (y - x_k) \cdot m_k^{(1)} + (x_{k+1} - y)\, m_k^{(2)} + \sum_{i=k+1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) m_i$$

$m_k^{(1)} = \inf\{f(x) \; x \in [x_k, y]\}$

$m_k^{(2)} = \inf\{f(x) \; y \in [y, x_{k+1}]\}$

$$L(f,P) = \sum_{j=0}^{n-1} m_j (x_{j+1} - x_j)$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} m_j (x_{j+1} - x_j) + m_k (x_{k+1} - x_k) + \boxed{\sum_{j=k+1}^{n-1} m_j (x_{j+1} - x_j)}$$

(1)

Αρκεί $m_u^{(1)}, m_u^{(2)} \geq m_u$

Απο ①,② $\Rightarrow (y - x_u)\, m_u^{(1)} + (x_{u+1} - y)\, m_u^{(2)} \geq m_u (x_{u+1} - x_u)$

Γιατί $m_u^{(1)} = \inf\{f(x) : x \in [x_u, y]\} \geq m_u = \inf\{f(x)\, x \in$

$\in [x_u, x_{u+1}]$

$\forall x \in [x_u, y] \quad f(x) \geq m_u. \Leftarrow f(x) \geq m_u \; \forall x \in [x_u, x_{u+1}]$

$\{f(x) \; x \in [x_u, y]\}$ κάτω ΓΡ από το $\Rightarrow m_u^{(1)} \geq m_u$

~~Αρκεί $m_u^{(1)}, m_u^{(2)} \geq m_u$~~

Δ.ο. $m_u^{(1)}, m_u^{(2)} \geq m_u \Rightarrow (y - x_u) m_u^{(1)} \geq (y - x_u) m_u$

& $(x_{u+1} - y) m_u^{(2)} \geq (x_{u+1} - y)\, m_u$

Παράδειγμα: αν $P_1 = P \cup \{y\}$, $y \notin P$

$U(f, P_1) \leq U(f, P)$
$L(f, P_1) \geq L(f, P)$

Γενικά: Αν P_1 διαμέριση ώστε
$P_1 \supseteq P_2$ (P_1 λεπτότερη P_2)
$\Rightarrow L(f, P_1) \geq L(f, P_2)$
$U(f, P_1) \leq U(f, P_2)$

Αν P, Q τυχαίες διαμερ. του $[a, b]$, $f\,[a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη
$L(f, P) \leq U(f, Q)$

$R = P \cup Q \supseteq P$, $\supseteq Q$ | R λεπτ. της P, της Q | $R \supseteq P \Rightarrow L(f, R) \geq L(f, P)$, $R \supseteq Q \Rightarrow U(f, R) \leq U(f, Q)$

$A_1 = \{L(f,P) : P$ διαμερ. του $[\alpha,\beta]\}$

$A_2 = \{U(f,Q)\ Q$ διαμ. $[\alpha,\beta]\}$

$\forall \alpha_1 \in A_1,\ \forall \alpha_2 \in A_2$

$\alpha_1 \leq \alpha_2$

Σταθ. ένα $\alpha_2 \in A_2$ τότε $\forall \alpha_1 \in A_1 : \alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2$ άνω φ. του A_1

$\exists \sup A_1 \leq \alpha_2 \quad \forall \alpha_2 \in A_2$.

$\sup A_1 \leq \inf A_2$

Ονομάζουμε κάτω ολοκλήρωμα της f, στο $[\alpha,\beta]$ το

$\overline{\int_\alpha^\beta} f = \sup A_1$, άνω ολοκλ.

$\underline{\int_\alpha^\beta} f = \inf A_2$, κάτω ολοκλ.

Αν το $\underline{\int_\alpha^\beta} f = \overline{\int_\alpha^\beta} f$, τότε θα λέμε ότι η f είναι (Riemann) ολοκληρώσιμη.

και $\int_\alpha^\beta f = \underline{\int_\alpha^\beta} f = \overline{\int_\alpha^\beta} f$

Κριτήριο Riemann

Έστω $f[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Η f είναι ολοκληρώσιμη αν κ μόνο αν, $\forall \varepsilon > 0 : \exists P_\varepsilon$ διαμερ. του $[\alpha,\beta]$ ώστε $U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$.

Έστω ότι f R-ολοκλ.

$\Rightarrow \sup\{L(f,P) : P$ διαμ. του $[a,b]\} = \underline{\int_a^b} f = \int_a^b f$ (1)

$\inf\{U(f,Q)\, Q, [a,b]\} = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$ (2)

Έστω $\varepsilon>0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \exists P_1$ διαμ. του $[a,b]$ $L(f,P_1) > \int_b^a f - \frac{\varepsilon}{2}$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} > U(f,P_2)$

$\hookrightarrow \exists P_2$ διαμ. του $[a,b]$

Διαλέγω $P = P_1 \cup P_2$

$U(f,P_2) \geq U(f,P)$

Θέτουμε $P_\varepsilon = P$

$U(f,P) - L(f,P) < \left[\int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}\right] - \left[\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}\right] = \varepsilon.$

Αντίστροφα
Εάν $\forall \varepsilon>0$, $\exists P_\varepsilon$ διαμ. ώστε $U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$. (1)
Θ.δ.ο. η f είναι R-ολοκλ.

Έστω $\varepsilon>0$ $\exists P_\varepsilon$ ώστε (1)

$\overline{\int_a^b} f \leq U(f,P_\varepsilon) < L(f,P_\varepsilon) + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b} f + \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$

$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} f \Rightarrow f$ R-ολ.

Scanned by CamScanner

Πόρισμα:

f: R-ολοκλ. στο $[\alpha,\beta]$ αν $\exists$ ακολ. διαμερίσεων $(P_n)_n$ του $[\alpha,\beta]$ τ.ω.

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$f:[0,1] \to \mathbb{R}$

i) $f(x) = 1, \ x \in \mathbb{Q}$

$\quad = 0, \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Έστω $P = \{x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1\}$ διαμερ του $[0,1]$

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k), \quad m_k = \inf\{f(x) \ x \in [x_k, x_{k+1}]\} = 0$$

$$U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = 1$$

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$$

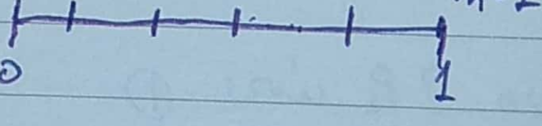
$\quad \| \ 1$

$M_k = 1$

$\forall P : U(f,P) - L(f,P) = 1 - 0 = 1$

άρα $\nexists P_\varepsilon : U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$

$f(x) = x^2, \ x \in [0,1]$



$n \in \mathbb{N} \sim P_n \quad \|P_n\| = \frac{1}{n}$

Σταθ. $n \in \mathbb{N}$

$$L(f,P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m_k = \frac{1}{n^3} \left[\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \right]$$

$$U(f,P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2 = \frac{1}{n^3} L_n$$

$$L_n = \frac{1}{n^3}\left(1^2+\dots+n^2\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot\frac{1}{n^3}$$

$$S_n = \frac{1}{n^3}\left(1^2+\dots+(n-1)^2\right)$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)(2n-1)}{6}\cdot\frac{1}{n^3} = L(f,P_n) \to 2/6 = 1/3,\ n\to\infty$$

$$U_s = \frac{1}{n^3}\cdot\left(1^2+\dots+n^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Rightarrow \frac{1}{3} \quad n\to\infty$$

$$\underline{\int_0^1} f \geq L(f,P_n),\ \forall\, n\to+\infty,\quad \underline{\int_0^1} f \geq \frac{1}{3}$$

$$\overline{\int_0^1} f \leq U(f,P_n),\ \forall\, n\to+\infty,\quad \overline{\int_0^1} f \leq \frac{1}{3}.$$

$$\frac{1}{3} \leq \underline{\int_0^1} f \leq \overline{\int_0^1} f \leq \frac{1}{3} \qquad \text{Άρα } \exists \int_0^1 f = \underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f = \frac{1}{3}$$